

热流问题的数值计算

Numerical Simulations of Thermal & Fluid Problems

第一章 绪论



主讲 陶文铨

西安交通大学能源与动力工程学院
热流中心 **CFD-NHT-EHT CENTER**

2007年10月16日，西安

物理问题数值解的基本思想

把原来在空间与时间坐标中连续的物理量的场（如速度场、温度场、浓度场等），用一系列有限个离散点（称为**节点**，**node**）上的值的集合来代替；通过一定的原则建立起这些离散点上变量值之间关系的代数方程（称为**离散方程**，**discretization equation**）；求解所建立起来的代数方程以获得所求解变量的近似解。

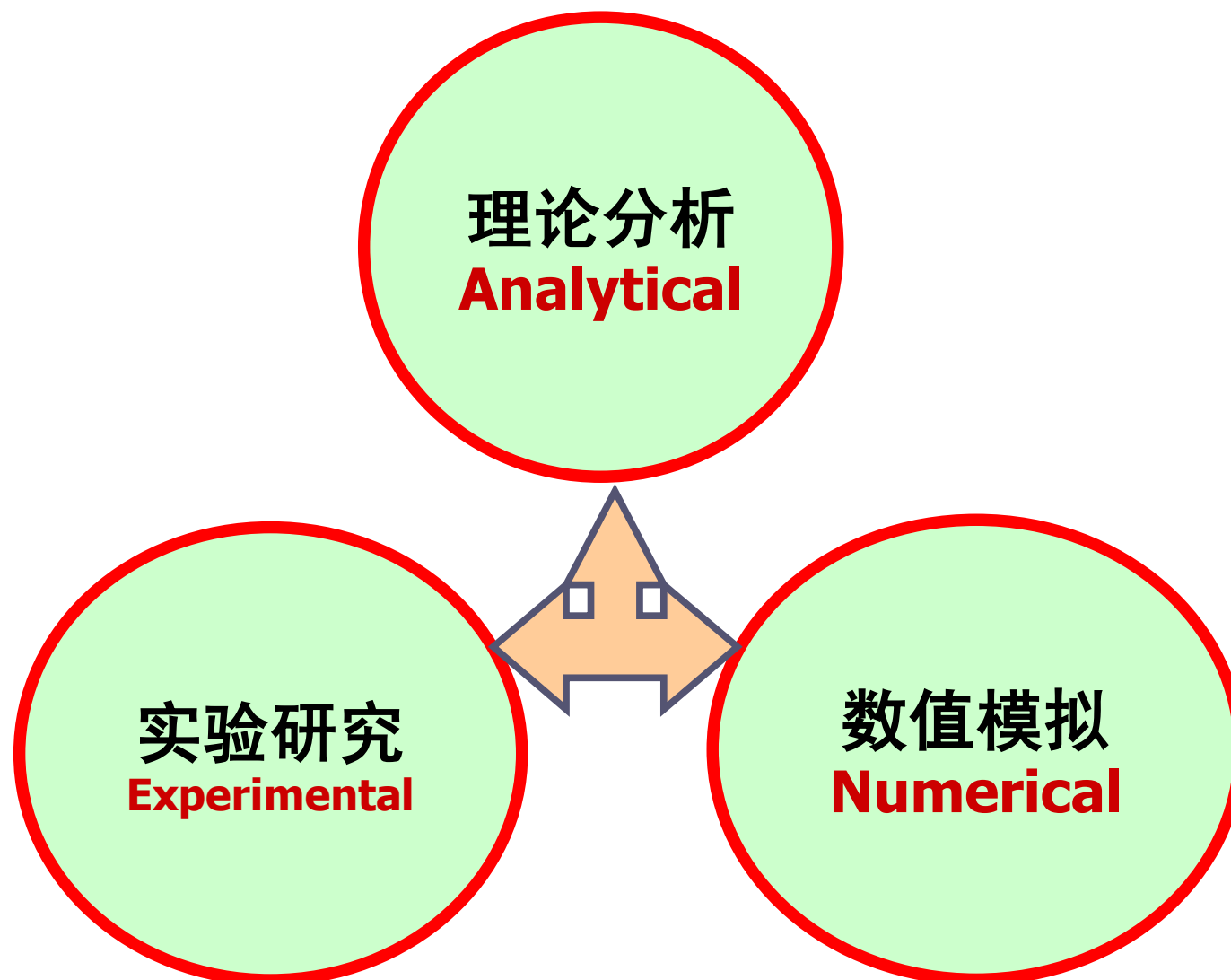
大规模科学计算的重要性

传热与流动问题数值计算是应用计算机求解热量传递过程中的速度场、温度场等的分支学科，是大规模科学计算的重要组成部分，其重要性不言而喻。

2005年美国总统顾问委员会向美国总统提出要大力发展计算科学以确保美国在世界上的竞争能力。

波音公司实现了对航空发动机的网格数达10亿量级的直接数值模拟,以研究所设计发动机的性能。

现代科学研究的三大基本方法及其关系



课程简介

1. 学时— 30学时理论教学；6学时计算机作业

2. 考核— 平时作业/计算机大作业/考试： 20/30/50

3. 方法— 理解，参与，应用

努力将与数学处理相对应的物理背景联系起来理解。

4. 助手— 于乐

5. 参考教材— 《计算流体力学与传热学》，中国建筑工业出版社，1991

学习方法建议

1. 善于从物理过程基本特性来掌握理解数值方法；
2. 对数值方法—**明其全而析其微**：明其全—了解基本原理；析其微—掌握实施细节；
3. 努力上机实践；
4. 学会分析计算结果：合理性，规律性；
5. 应用商业软件与自编程序相结合。

《热流问题的数值计算》 主要教学内容

第一章 绪论（物理与数学基础）

第二章 一维导热问题的数值解

第三章 多维导热问题的数值解

第四章 势流及管道内充分发展流动与换热的数值解

第五章 有回流的动与换热问题的数值解

第六章 二维涡量一流函数法通用程序介绍

第七章 原始变量法与湍流数值模拟简介

绪论

1.1 流动与传热问题控制方程的基本类型

1.2 流动与传热问题数值计算的基本步骤

1.3 建立离散方程的方法

1.4 离散方程数学与物理特性分析简介

1.1 流动与传热问题控制方程的基本类型

1.1.1 流动与传热问题完整的数学描写

1.1.2 控制方程

1. 质量守恒方程

2. 动量守恒方程

3. 能量守恒方程

1.1.3 单值性条件

1.1.4 建立数学描写举例

1.1.5 控制方程式的分类

1.1 流动与传热问题控制方程的基本类型

1.1.1 流动与传热问题完整的数学描写

1. 有关的守恒定律的偏微分方程（控制方程）

一切宏观的流动与传热问题都由三个守恒定律所支配：质量、动量与能量守恒（**conservation law**）。

2. 与表述守恒定律的偏微分方程相关的单值性条件。

不同问题的区别主要在于单值性条件（**conditions for unique solution**）的不同：初始条件以、边界条件以及物性数据。

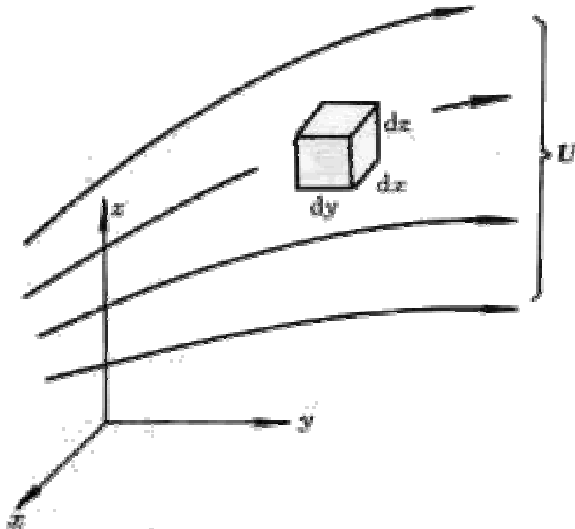
1.1.2 控制方程(Governing equations)

1. 质量守恒方程 Mass conservation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

单位时间
内质量的
增加

单位时间内流
进微元体的净
质量



物理意义：单位时间内空间某一微元容积质量的增加等于流入该微元容积的净质量。

对不可压缩流体: $\rho = \text{const}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

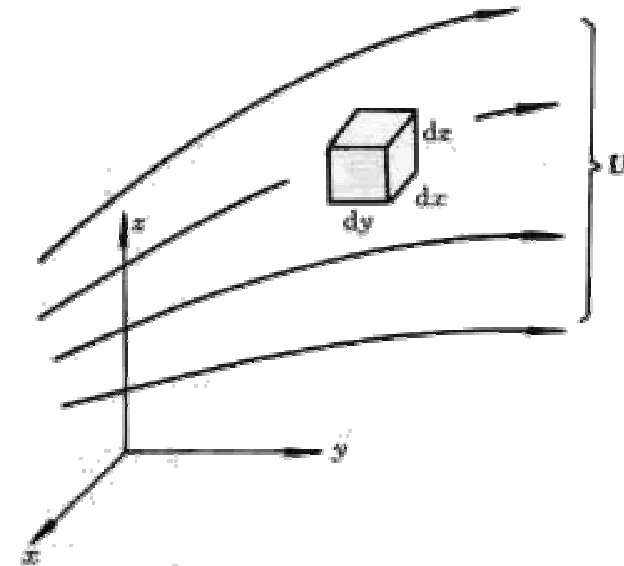
对二维不可压缩流体:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

对二维问题, 速度矢量:

$$\vec{U} = u \vec{i} + v \vec{j}$$

数学上称: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \text{div}(\vec{U})$



为速度矢量的**散度**, 因此对二维不可压流体有:

$$\text{div}(\vec{U}) = 0$$

下面只讨论不可压缩流体(**incompressible flow**)。

2. 动量守恒方程(Momentum conservation)

对上图所示的微元体分别在三个坐标方向上应用
Newton第2定律 ($F=ma$) 在流体中的表现形式:
[微元体内动量的增加率]=[作用在微元体上各种力之和]

可得出三个坐标方向的动量方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + F_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial vu}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + F_y \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial wu}{\partial x} + \frac{\partial wv}{\partial y} + \frac{\partial ww}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + F_z \end{aligned}$$

微元体内动
量的增加率

压力

粘性力

体积力

3. 能量守恒方程(Energy conservation)

[微元体内热力学能的增加率]=[通过流动与导热进入微元体内的净热流量]+[体积力与表面力对微元体所做的功率]

引入导热**Fourier**定律，假定热物性为常数，可得

$$\rho c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} + \frac{\partial(wT)}{\partial z} \right] = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + S$$

微元体
内能增
加率

$$\frac{\lambda}{\rho c_p} = a$$

由于流动被带出
微元体的净功率

由于导热而进入
微元体的净功率

源项
生成
热

流体的热扩散率(**thermal diffusivity**)

4. 对于二维稳态对流换热问题控制方程汇总

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial uu}{\partial y} + \frac{\partial uv}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F_x \\ \frac{\partial vu}{\partial y} + \frac{\partial vv}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + F_y \\ \frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + S_T \end{array} \right.$$

对流项

扩散项

源项

数值计算中常用的术语。

不同的二维、稳态求解问题之间的区别在于：

- (1) 边界条件不同；
- (2) 源项与扩散系数不同。

5. 二点说明

1. 所导出的三维非稳态**Navier-Stokes**方程，无论对层流或是湍流都是适用的。

2. 辐射换热需要用积分方程来描述，课程中将不涉及这类问题。

1.1.3 单值性条件

1. 初始条件 $t = 0, T = f(x, y, z)$

2. 边界条件

(1) 第一类 (**Dirichlet**): $T_B = T_{given}$

(2) 第二类 (**Neumann**): $q_B = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_B = q_{given}$

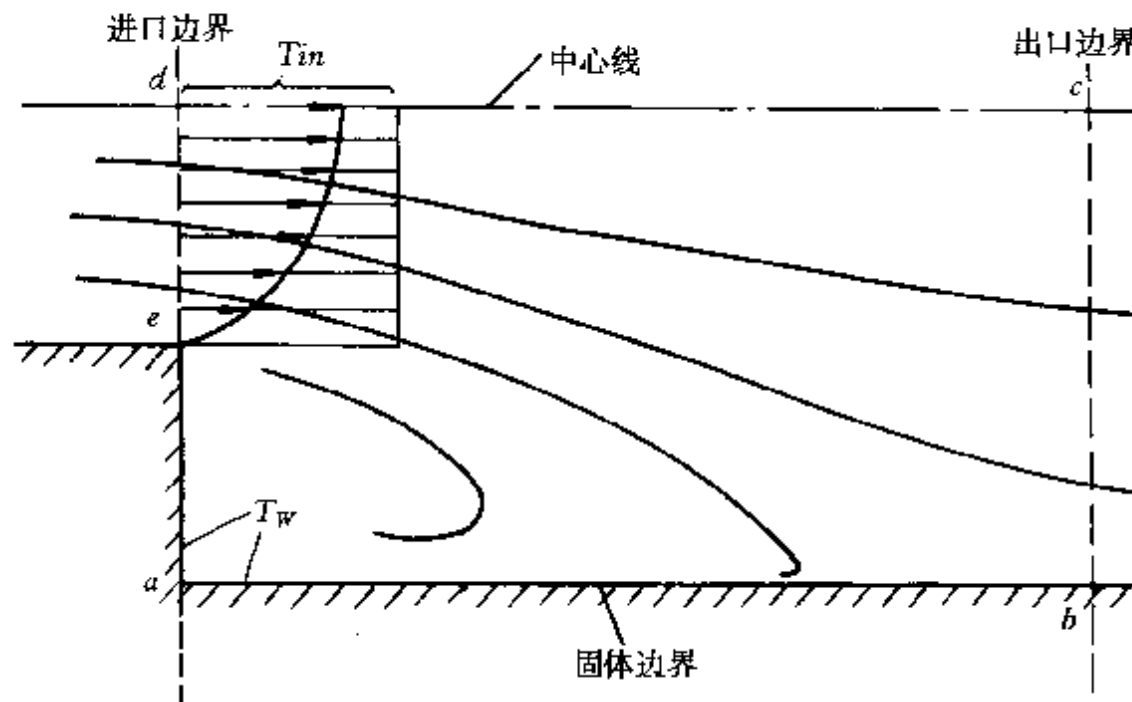
(3) 第三类 (**Rubin**): 规定了边界上被求函数的一阶导数与函数之间的关系: $-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_B = h(T_B - T_f)$

数值计算中计算区域的出口边界条件常常最难确定，要做近似处理。

1.1.4 建立数学描写举例

1. 问题与假设条件

突扩区域中的对流传热：二维、稳态、不可压缩、常物性、不计重力与黏性耗散。



2. 控制方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

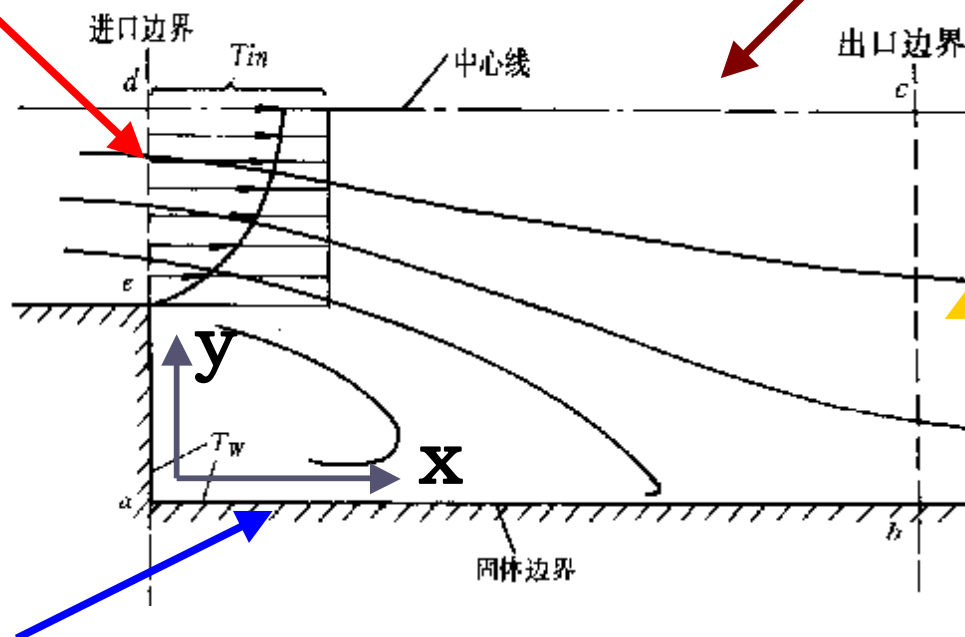
$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

3. 边界条件

(1) 进口边界条件：给定 u, v, T 随 y 的分布；

(3) 中心线： $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0$; $v = 0$

(4) 出口边界：数学上要求给定 u, v, T 或其导数随 y 的分布；实际上做不到；数值上近似处理



(2) 固体边界条件：速度无滑移，温度无跳跃

1.1.5 传热与流动问题的数学描写的分类

1. 从数学角度分类—椭圆型与抛物型

椭圆型 (Elliptic)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

椭圆型方程数学上的特点是：**所求解的因变量对每个空间自变量均存在二阶导数项：**

导热方程—所求解的因变量为温度 T ，空间自变量 x, y ；

动量方程—所求解的因变量为速度 u ，空间自变量 x, y 。

抛物型(Parabolic)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

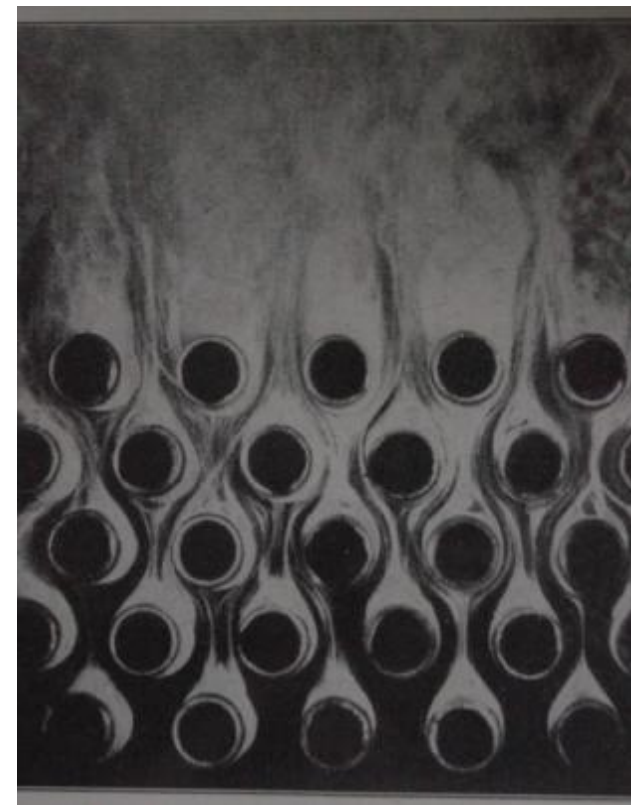
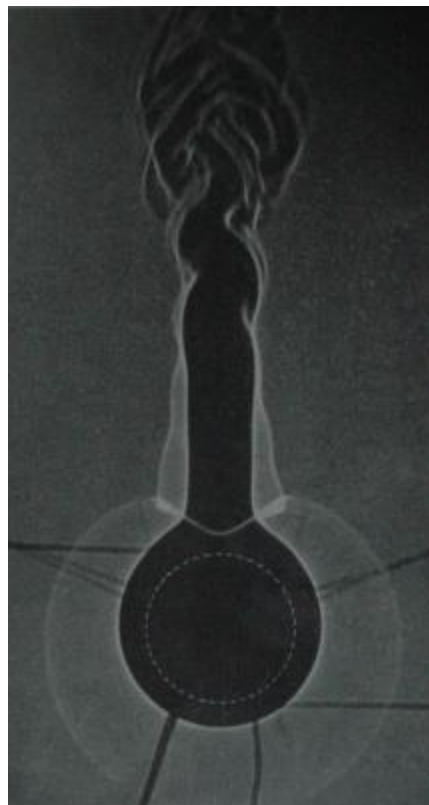
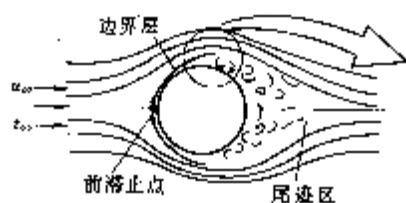
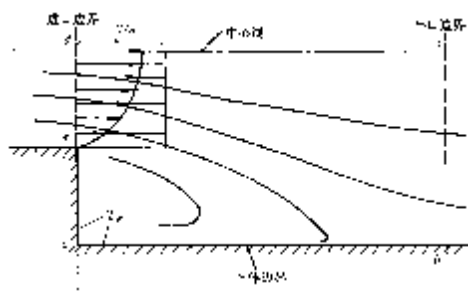
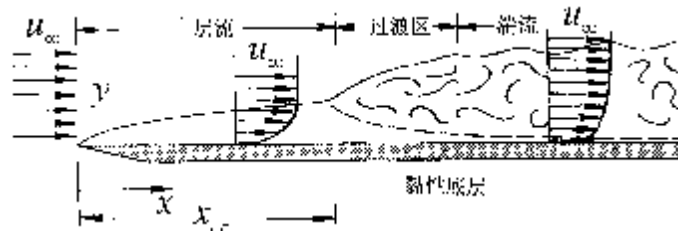
抛物型方程数学上的特点是：所求解的因变量对某个自变量只存在一阶导数项：

非稳态导热方程—因变量T 对时间t仅有一阶导数；

边界层动量方程—u对空间自变量x仅有一阶导数。

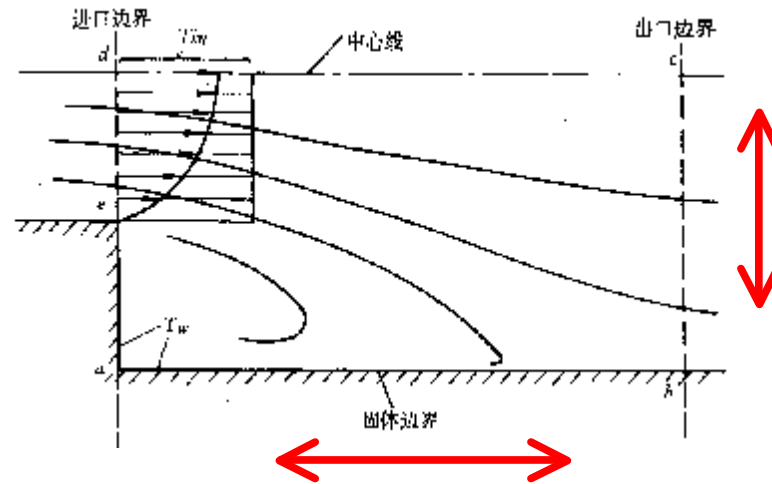
仅存在一阶导数的自变量在物理过程上的重要特点：过程只能沿该坐标的单个方向进行而不能逆向进行。

抛物型与椭圆型流动的例子

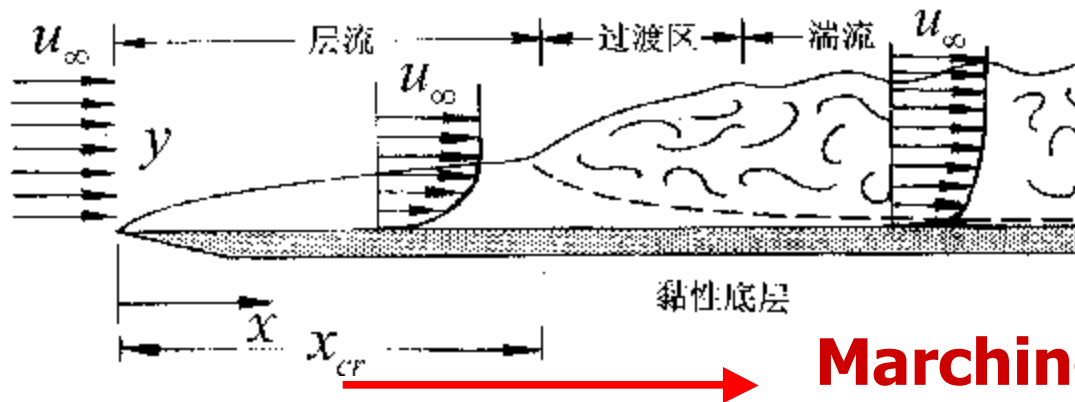


椭圆型方程的求解必须全场联立进行，而抛物性方程的求解可以沿坐标正向逐步推进，大大节省时间。

(1) 椭圆型问题：
流动有回流，必须
全场同时求解；



(2) 抛物型问题：流动无回流，可以沿主流方向步步逼近，不必全场同时求解，大大节省时间。



Marching method

2. 从物理角度分类—守恒型与非守恒型

守恒型 (**Conservative**)—对任意大小容积守恒特性
都能得到满足的方程；

凡对流项表示成散度形式的方程具有守恒性。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

非守恒型方程

$$+ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

$$\frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)$$

守恒型方程

凡是从守恒型控制方程推导得到的用于数值求解的代数方程也具有守恒特性。

1.2 流动与传热问题数值求解的基本步骤

1.2.1 流动与传热问题数值求解步骤

1. 建立数理模型

2. 区域的离散化

3. 方程的离散化

4. 边界条件离散

5. 代数方程求解

6. 求解结果分析

1.2.2 区域离散化方法

1. 区域离散化的任务

2. 区域离散方法

1) 外节点法

2. 内节点法

1.2.3 网格系统标记方法

1.2.1 流动与传热问题数值求解步骤

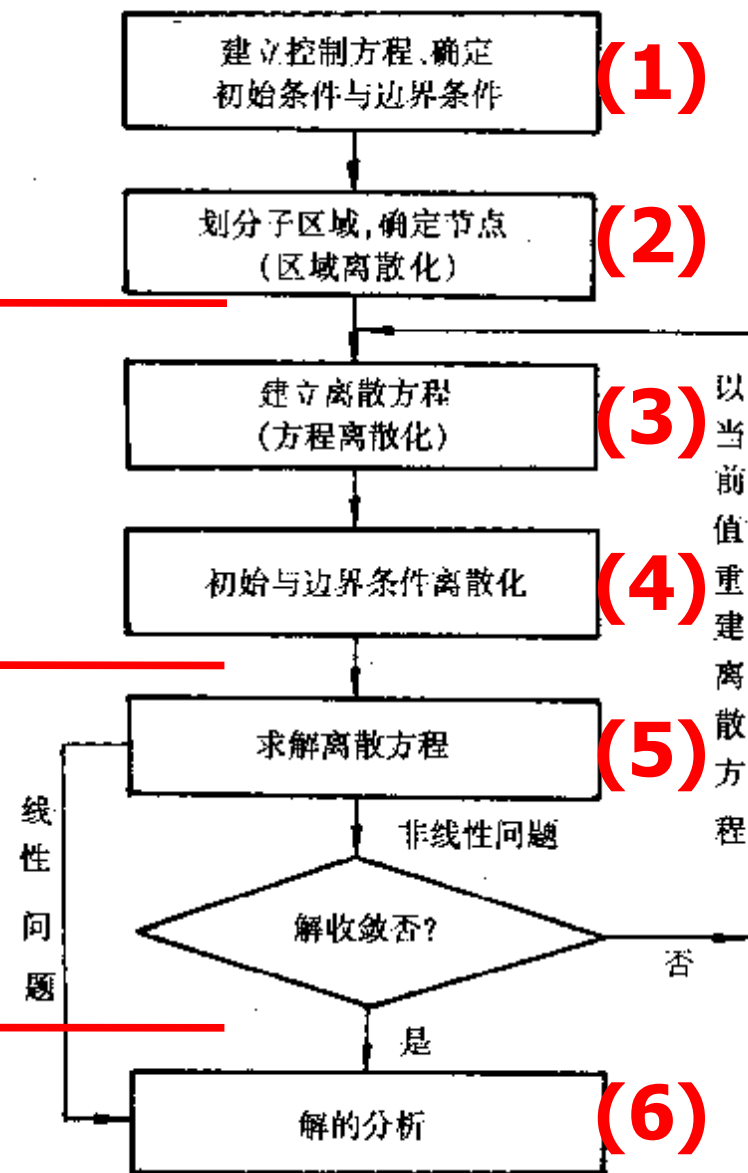
把原来在空间与时间坐标中连续的物理量的场（如速度场、温度场、浓度场等），用一系列有限个离散点（称为节点，**node**）上的值的集合来代替；通过一定的原则建立起这些离散点上变量值之间关系的代数方程（称为离散方程，**discretization equation**）；求解所建立起来的代数方程以获得所求解变量的近似解。

区域离散

方程离散

代数求解

结果分析



1.2.2 区域离散化

1. 区域离散化的任务

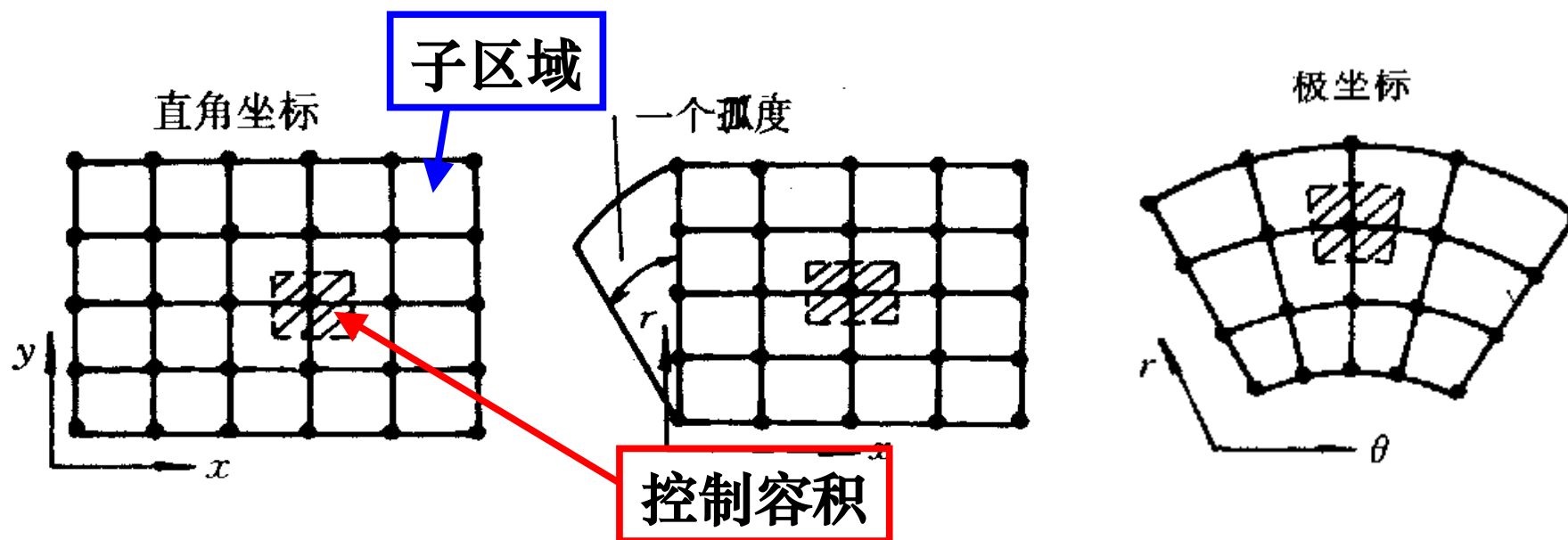
将所计算的区域分割成许多不重叠的子区域，确定每个子区域中节点的位置以及所代表的控制容积。

离散结果得出四种几何要素：

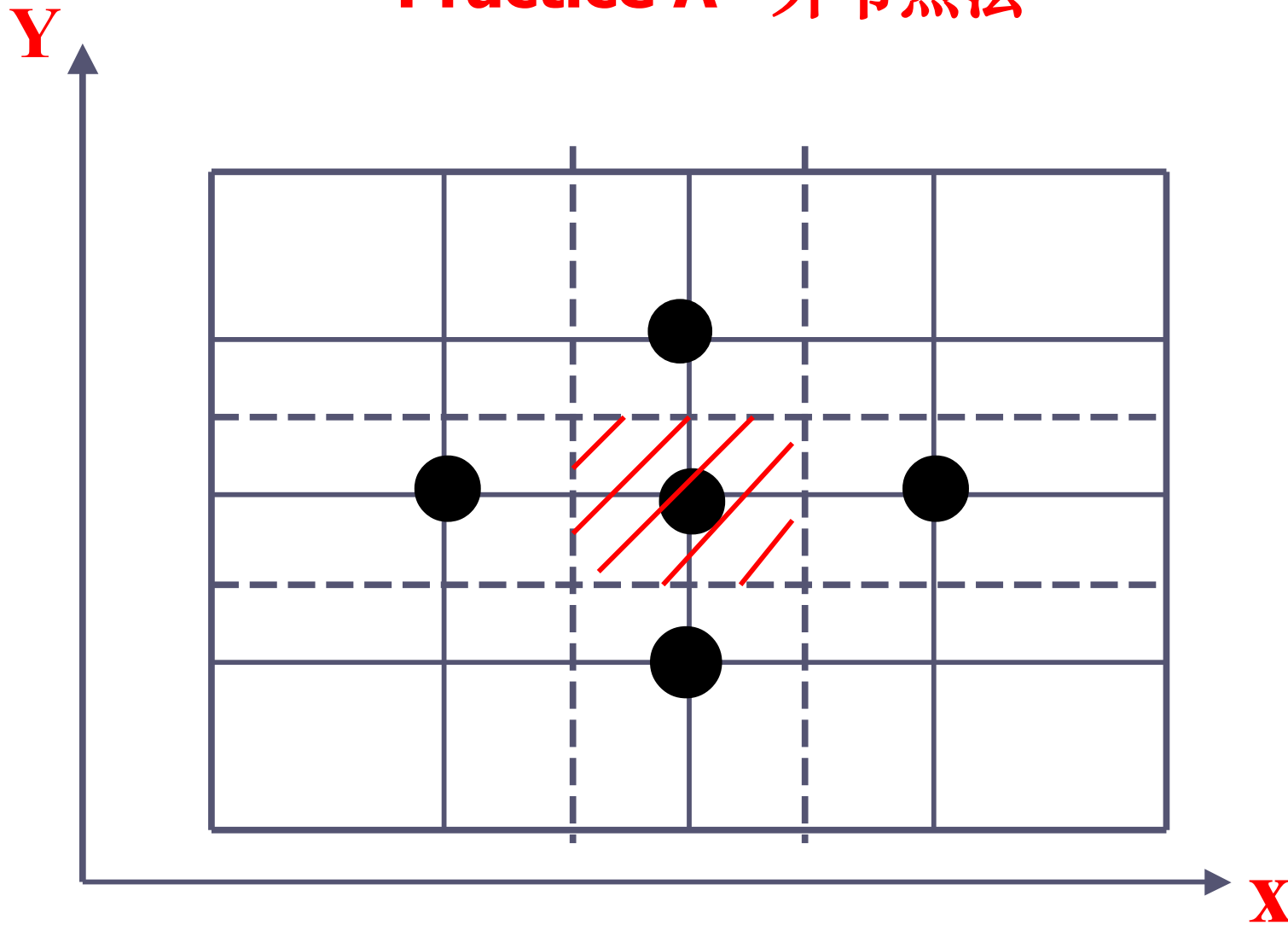
- (1) **节点 (node)**: 所求解未知量的位置；
- (2) **控制容积 (control volume)**: 实施守恒定律的最小几何单位；
- (3) **界面 (interface)**: 控制容积的分界位置；
- (4) **网格线 (grid lines)**: 沿坐标方向相邻节点连接成的曲线簇。

2. 区域离散方法

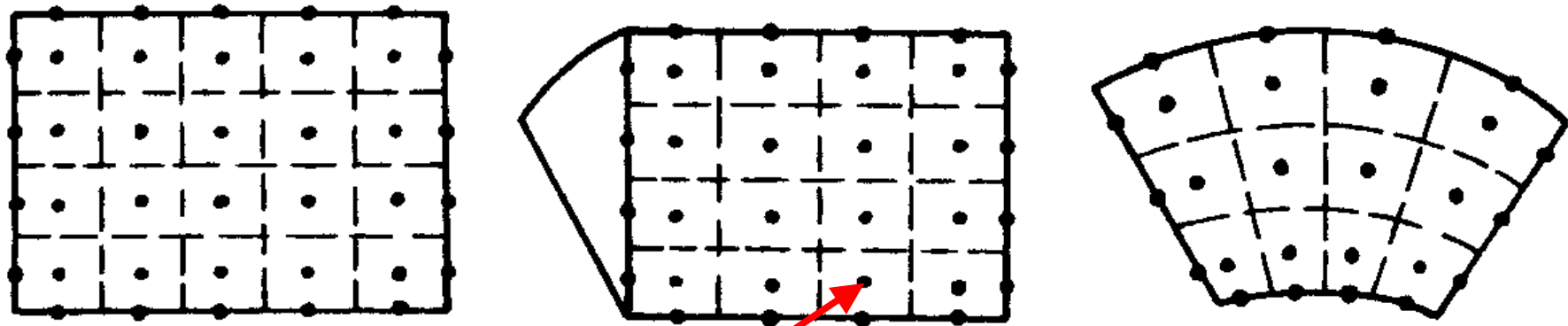
(a) 外节点法：节点位于子区域的角顶；控制容积界面位于两节点之间；生成过程：先节点后界面；又称 **Practice A**。



Practice A—外节点法

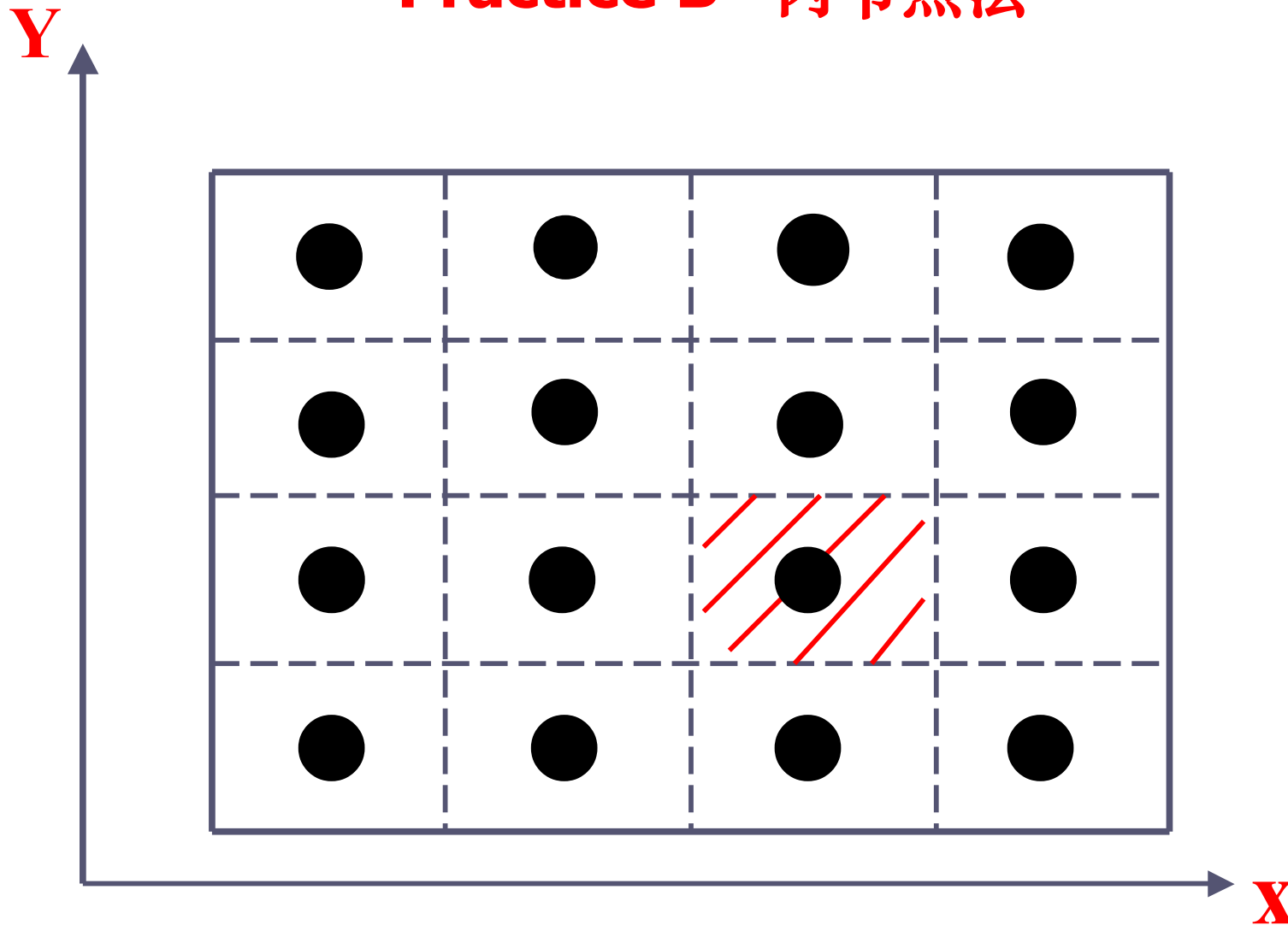


(b) 内节点法：节点位于子区域的中心；子区域即为控制容积；**生成过程：先界面，后节点，又称 Practice B。**



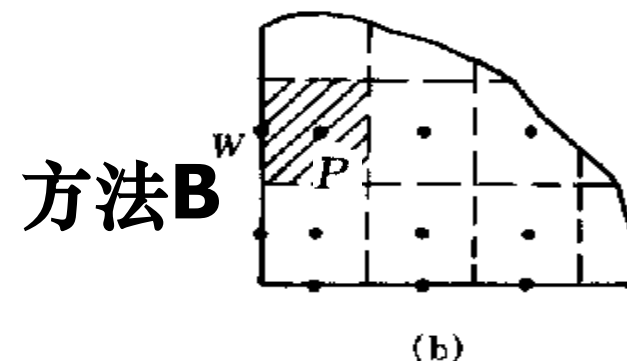
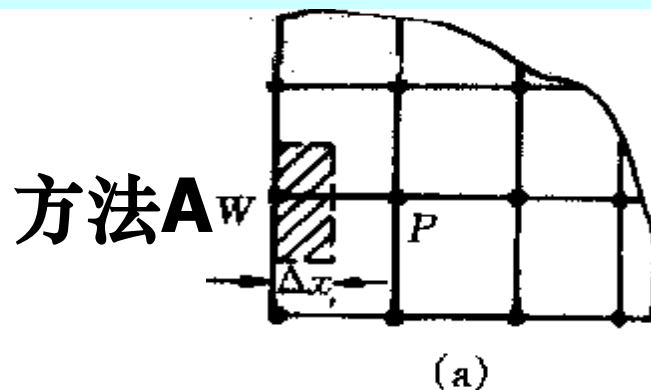
子区域即为控制容积

Practice B—内节点法



1.2.3 内接点与外节点法的比较

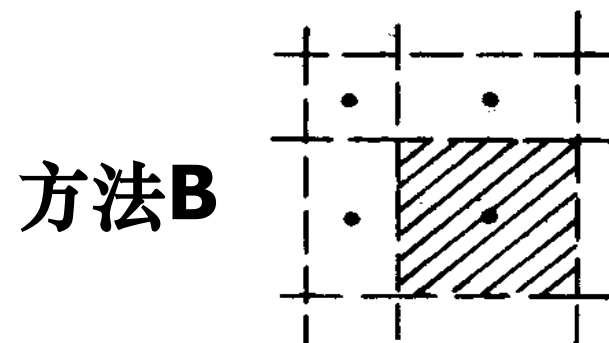
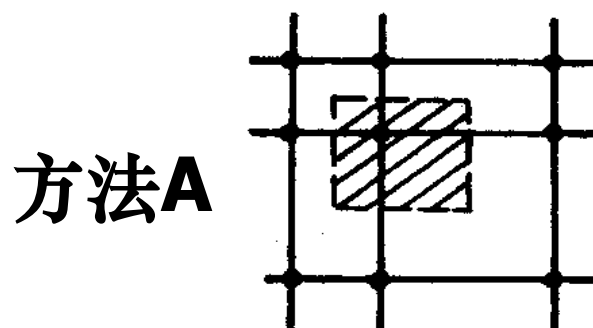
(a) 边界节点所代表的控制容积不同



边界节点代表半个CV

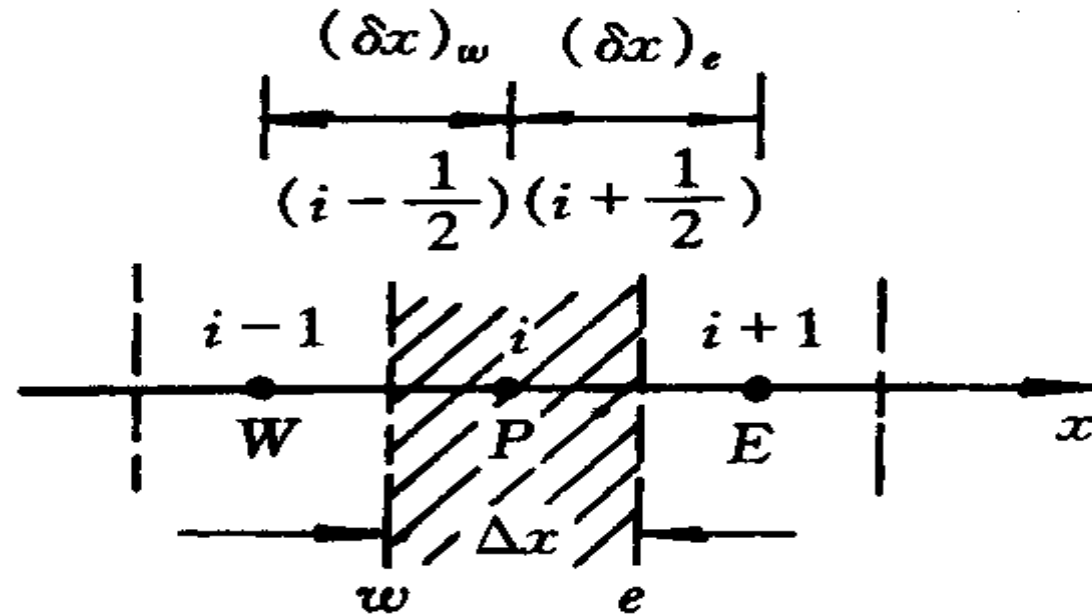
边界节点代表零个CV

(b) 网格非均分时，节点作为控制容积的代表方法B更合理



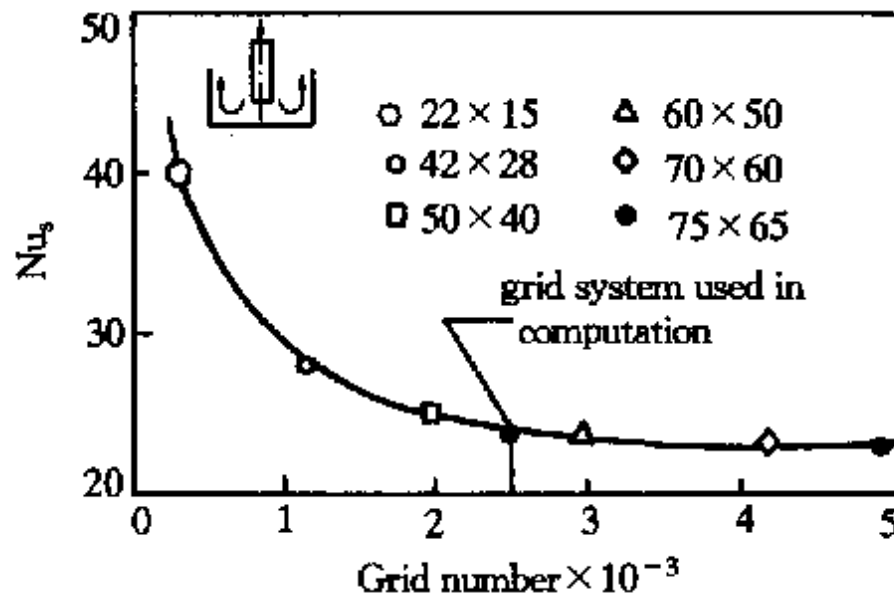
1.2.3 网格系统表示方法

网格线—节点间连线,用实线表示; 界面为虚线;
节点间距离— δx ; 界面间距离— Δx 。



1.2.4 网格独立解

当网格足够细密以至于再进一步加密网格已对数值计算结果基本上没有影响时所得到的数值解称为网格独立解 (**grid-independent solution**)。



**Int. Journal
Numerical Methods
in Fluids, 1998, 28:
1371-1387.**

1.3 建立离散方程的方法

1.3.1 一维模型方程（ **1-D model equation** ）

1.3.2 由Taylor 展开法导出导数的差分表示式

1.3.3 控制容积积分法导出导数的差分表示式

1.3.4 讨论

1.3 建立离散方程的方法

1.3.1 一维模型方程（1-D model equation）

一维模型方程是一维非稳态有源项的对流-扩散方程，具有四个特征项，便于离散方法的研讨。

非守恒型
$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \rho u \frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) + S_\phi$$
 FDM采用

守恒型
$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) + S_\phi$$
 FVM采用

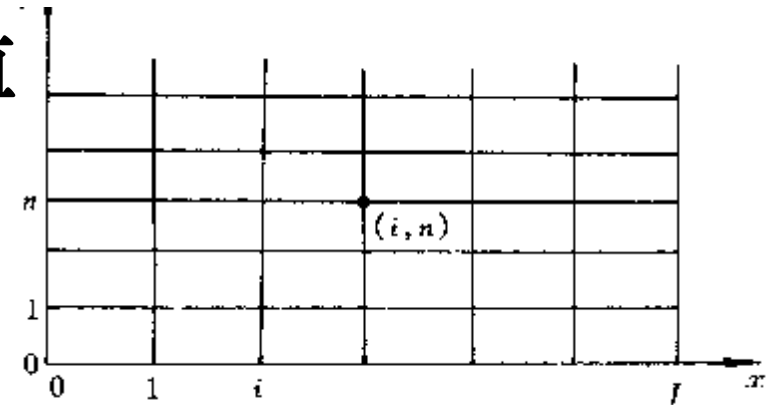
瞬态对流扩散源项

“麻雀虽小，五脏俱全！”

1.3.2 由Taylor 展开法导出导数的差分表示式

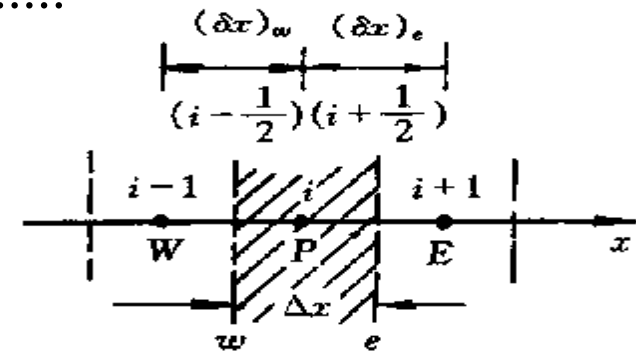
1. 一阶导数的差分表达式的导出

将函数 $\phi(x, t)$ 在 $(i+1, n)$ 的值
对 (i, n) 点做Taylor展开:



$$\phi(i+1, n) = \phi(i, n) + \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{i, n} \Delta x + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_{i, n} \frac{\Delta x^2}{2!} + \dots$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{i, n} = \frac{\phi(i+1, n) - \phi(i, n)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) \Big|_{i, n} + \dots$$



$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i,n} = \frac{\phi(i+1,n) - \phi(i,n)}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

$O(\Delta x)$ 称为截断误差, **truncation error**, 表示:

随 Δx 的趋于零, 用 $\frac{\phi(i+1,n) - \phi(i,n)}{\Delta x}$ 代替 $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i,n}$ 的误差

$\leq K\Delta x$, K 与 Δx 无关。

Δx 的方次称为截差的阶数 (**order of TE**)。

用数值计算的近似解 ϕ_i^n 代替精确解 $\phi(i,n)$

得向前差分:

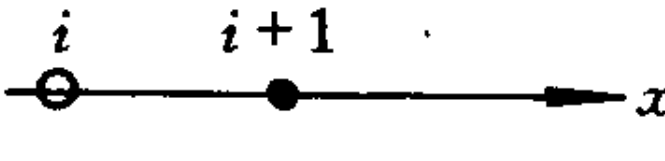
$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i,n} \cong \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_i^n}{\Delta x}, O(\Delta x)$$

向后差分: $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i,n} \cong \frac{\phi_i^n - \phi_{i-1}^n}{\Delta x}, O(\Delta x)$

中心差分: $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i,n} \cong \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2\Delta x}, O(\Delta x^2)$

2. 一、二阶导数的各种差分表达式。

表达差分结构的格式图案

$$\frac{\phi_{i+1}^n - \phi_i^n}{\Delta x}$$


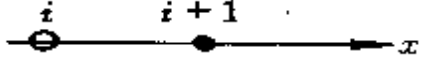
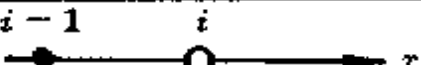

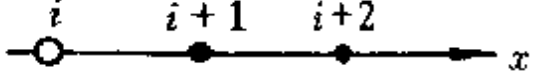



构筑差分表达式的位置；

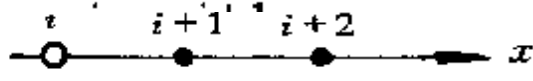
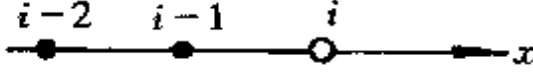
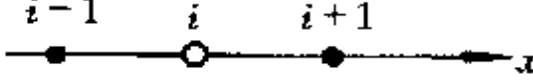


构筑差分表达式所用到的节点。

一阶导数的 常用差分表达式

导数	差分表示式	格式图案	截差
$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i,n}$	$\frac{\phi_{i+1}^n - \phi_i^n}{\Delta x}$		$O(\Delta x)$
	$\frac{\phi_i^n - \phi_{i-1}^n}{\Delta x}$		$O(\Delta x)$
	$\frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2\Delta x}$		$O(\Delta x^2)$
	$\frac{-3\phi_i^n + 4\phi_{i+1}^n - \phi_{i+2}^n}{2\Delta x}$		$O(\Delta x^2)$
	$\frac{3\phi_i^n - 4\phi_{i-1}^n + \phi_{i-2}^n}{2\Delta x}$		$O(\Delta x^2)$

二阶导数的常用差分表达式

导数	差分表示式	格式图案	截差
$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$	$\frac{\phi_i^n - 2\phi_{i+1}^n + \phi_{i+2}^n}{\Delta x^2}$		$O(\Delta x)$
	$\frac{\phi_i^n - 2\phi_{i-1}^n + \phi_{i-2}^n}{\Delta x^2}$		$O(\Delta x)$
	$\frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{\Delta x^2}$		$O(\Delta x^2)$

定性判别导数的差分表达式正确与否的方法：

(1) 量纲是否正确 — 与导数本身一致；

(2) 均匀场的各阶导数应为零。

3. 一维模型方程的有限差分显式离散表示式

微分方程形式:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \rho u \frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)$$

假设 ρ, u, Γ 均为常数,

显式差分表达式:

$$\rho \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} + \rho u \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2\Delta x} = \Gamma \frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{\Delta x^2}, O(\Delta t, \Delta x^2)$$

显式 (Explicit) — 空间导数均以初始时刻之值计算。

差分方程
截断误差

1.3.3 控制容积积分法导出导数的差分表示式

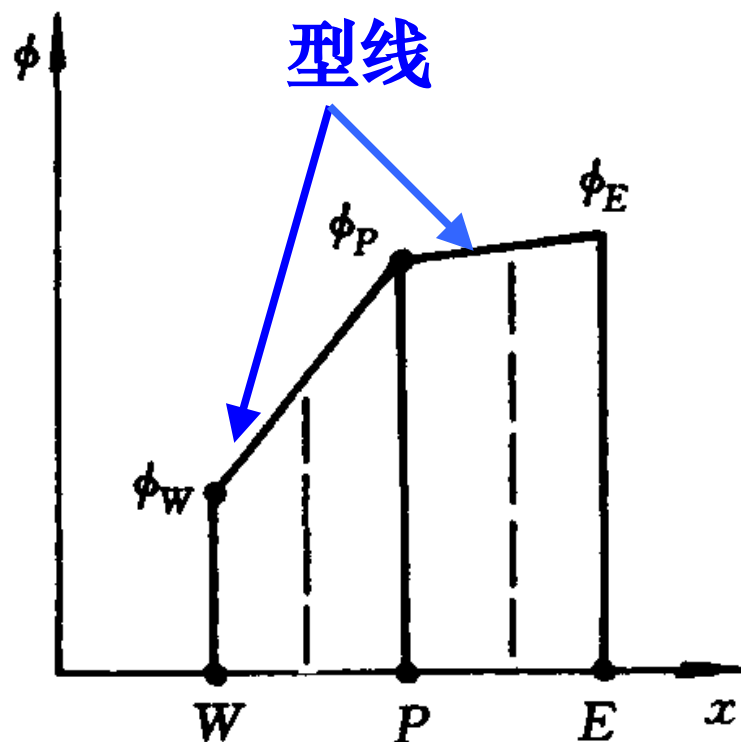
1. 控制容积积分法实施步骤

1. 将守恒型的方程对控制容积做积分；
2. 选定被求函数及其一阶导数对时间、空间的变化曲线一型线；
3. 完成积分，整理成相邻节点间未知量的代数方程。

2. 两种常用型线

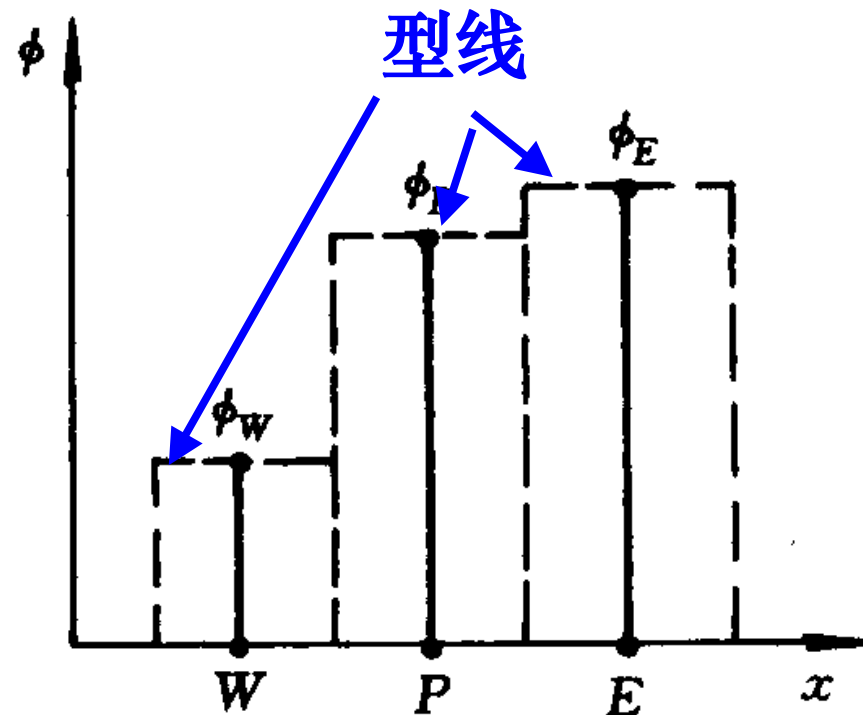
型线一被求函数随自变量的局部变化方式，本是所求内容，近似求解需先假定。

随空间自变量的变化型线



分段线性

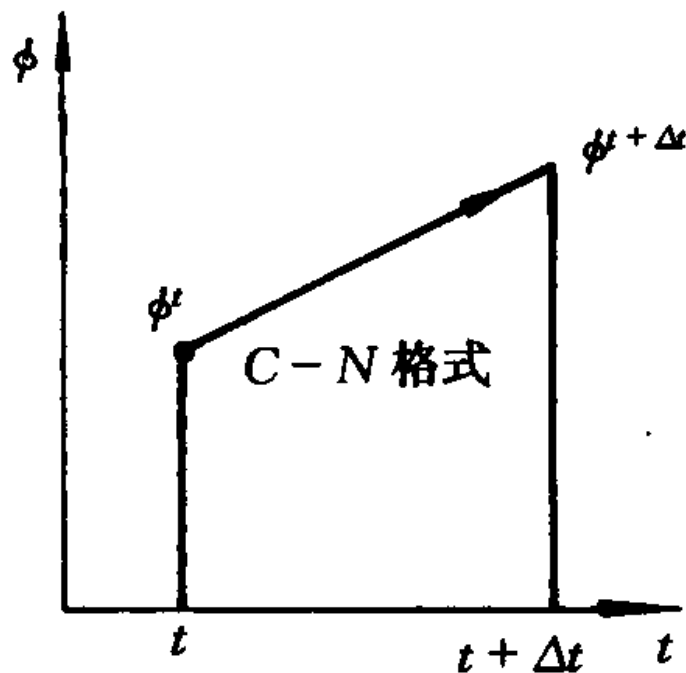
piece-wise linear



阶梯逼近

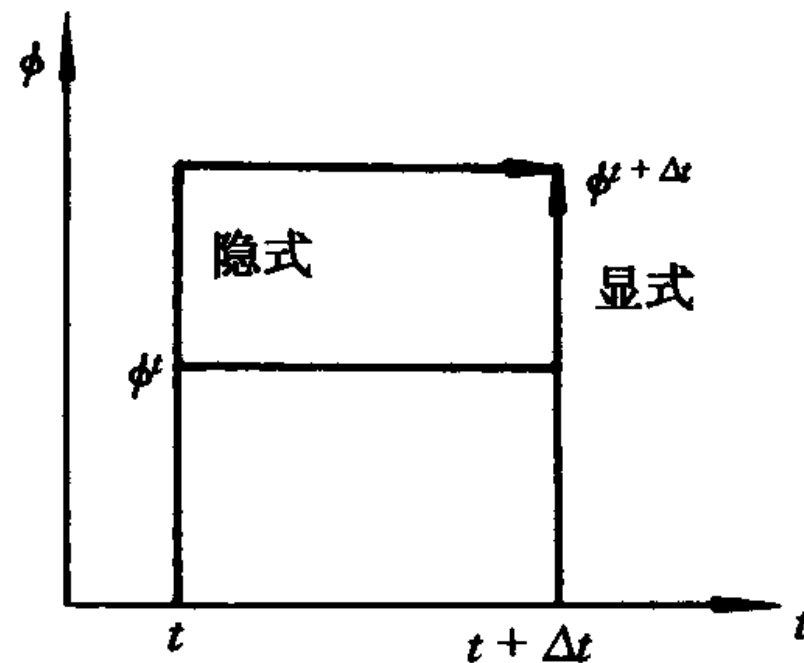
step-wise approximation

随时间自变量的变化型线



分段线性

piece-wise linear



阶梯逼近

step-wise approximation

3. 一维模型方程的控制容积积分法离散

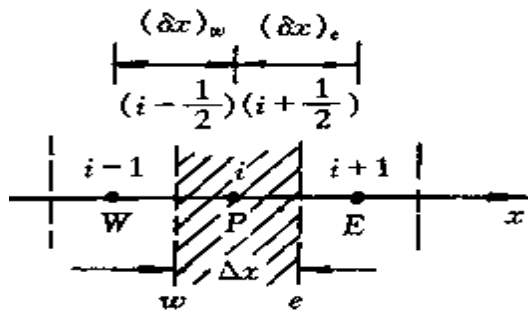
将守恒型控制方程对控制容积P 在 $[t, t + \Delta t]$ 内
做积分，

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)$$

立即可得

$$\rho \int_w^e (\phi^{t+\Delta t} - \phi^t) dx + \rho \int_t^{t+\Delta t} [(u\phi)_e - (u\phi)_w] dt =$$

$$= \Gamma \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)_e - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)_w \right] dt$$



继续积分，需要知道： ϕ 以及
对空间与时间的变化型线。

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

1. 非稳态项

假设 ϕ 对空间呈阶梯型变化:

$$\rho \int_w^e (\phi^{t+\Delta t} - \phi^t) dx = \rho (\phi_P^{t+\Delta t} - \phi_P^t) \Delta x$$

2. 对流项

假设 ϕ 对时间呈显示阶梯型变化:

$$\rho \int_t^{t+\Delta t} [(u\phi)_e - (u\phi)_w] dt = \rho [(u\phi)_e^t - (u\phi)_w^t] \Delta t$$

假设 ϕ 对空间呈分段线性变化:

$$\rho[(u\phi)_e^t - (u\phi)_w^t]\Delta t = \rho u \Delta t \left(\frac{\phi_E + \phi_P}{2} - \frac{\phi_P + \phi_W}{2} \right) = \rho u \Delta t \frac{\phi_E - \phi_W}{2}$$

均分网格

3. 扩散项

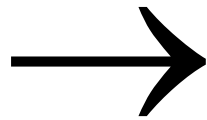
假设 $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ 对时间呈显式阶梯型变化:

$$\Gamma \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] dt = \Gamma \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e^t - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w^t \right] \Delta t$$

假设 ϕ 对空间呈分段线性变化:

$$\Gamma \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e^t - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w^t \right] \Delta t = \Gamma \Delta t \left[\frac{\phi_E - \phi_P}{(\Delta x)_e} - \frac{\phi_P - \phi_W}{(\Delta x)_w} \right]$$

均分网格



$$= \Gamma \Delta t \frac{\phi_E - 2\phi_P + \phi_W}{\Delta x^2}$$

最后可得

$$\rho \frac{\phi_P^{t+\Delta t} - \phi_P^t}{\Delta t} + \rho u \frac{\phi_E^t - \phi_W^t}{2\Delta x} =$$

$$\Gamma \frac{\phi_E^t - 2\phi_P^t + \phi_W^t}{\Delta x^2}, O(\Delta t, \Delta x^2)$$

在均分网格情况下与Taylor展开法的结果一致：

Taylor展开法

$$\rho \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} + \rho u \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2\Delta x} =$$
$$\Gamma \frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{\Delta x^2}, O(\Delta t, \Delta x^2)$$

控制容积积分法

$$\rho \frac{\phi_P^{t+\Delta t} - \phi_P^t}{\Delta t} + \rho u \frac{\phi_E^t - \phi_W^t}{2\Delta x} =$$
$$\Gamma \frac{\phi_E^t - 2\phi_P^t + \phi_W^t}{\Delta x^2}, O(\Delta t, \Delta x^2)$$

1.3.4 讨论

1. 在FVM中型线的目的在于导出离散方程；一旦离散方程建立，型线的任务就完成；

2. 型线的选取不追求一致性；

3. Taylor 展开法的推导便于进行数学分析，但物理概念不明确；有限容积法物理概念清晰，便于变步长处理，成为绝大多数商业软件的首选方法。

1.4 离散方程的数学物理特性

1.4.1 截断误差及相容性

1.4.2 离散误差与收敛性

1.4.3 舍入误差与初值问题的稳定性

1.4.4 数值特性分析举例

1.4.5 von Neumann 分析方法

1.4.6 离散方程的守恒特性

1.3.1 截断误差及相容性 (consistency)

1.3.1 截断误差及相容性 (consistency)

当 $\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0$ 如果离散方程的截断误差趋于零，则称该离散方程与微分方程相容。

当离散方程的截断误差表示为 $O(\Delta t^n, \Delta x^m) (n, m > 0)$ 离散方程具有相容性；当截断误差含有 $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ 项时，只有当 Δt 比 Δx 更快地趋于零时，才具有收敛性。

1.3.2 离散误差与收敛性

1. 数值解的离散误差(discretization error) ρ_i^n

1. 离散方程的精确解

离散方程求解过程中不引入任何舍入误差的解称为精确解，记为 ϕ_i^n 。

$$\rho_i^n = \phi(i, n) - \phi_i^n$$

微分方程的精确解

离散方程的精确解

2. 影响离散误差的因素

(1) 截断误差：截差阶数越高，同样网格下， ρ_i^n 越小

(2) 网格步长：同样截差下，网格加密，误差减小；

对一般工程计算格式截差选取建议：扩散项—二阶，对流项—2、3阶

3. 离散方程的收敛性

当 $\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0$ 如果 $\rho_i^n \rightarrow 0$ 则离散方程收敛。

收敛性的证明并不容易，对线性问题有**Lax**原理。

1.4.3 舍入误差(round-off error)与初值问题的稳定性

1. 数值解的舍入散误差 ε_i^n

$$\varepsilon_i^n = \phi_i^n - \tilde{\phi}_i^n$$

$\tilde{\phi}_i^n$ 从计算机实际得到的解。

2. 影响舍入误差的因素

计算机字长；离散方程求解方法。

3. 数值解误差的组成

$$\phi(i, n) - \tilde{\phi}_i^n = \underbrace{\phi(i, n) - \phi_i^n}_{\text{red}} + \underbrace{\phi_i^n - \tilde{\phi}_i^n}_{\text{blue}} = \rho_i^n + \varepsilon_i^n$$

一般情况下 ρ_i^n 占主导地位。

4. 初值问题显式格式的稳定性

初值问题的求解计算是步进过程；任何时层的计算中引入的误差不会在后续时层的计算中不断地被放大以至于使数值解变得无界，称格式是稳定的。

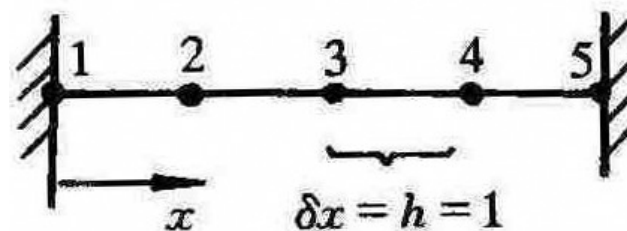
稳定性是格式固有属性，不论何种误差均有反应。

1.4.4 数值特性分析举例

例1-3 截差、网格疏密的影响例题

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d\phi}{dx} - 2\phi = 0$$

$$\phi(0) = 0; \phi(4) = 1$$



解：采用有限差分法，用差分式代替 $\frac{d^2\phi}{dx^2}$, $\frac{d\phi}{dx}$ 。

采用二阶截差时，可对节点**2**，**3**，**4**建立离散方程；

对节点**3**采用四阶截差，对节点**2**，**4**二阶截差。

与精确解对比

$$\phi = \frac{e^x - e^{2x}}{e^4 - e^{-8}}$$

表 3-1 不同格式计算结果的比较

格 式	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5
精确解	0	0.047 3	0.135 0	0.367 9	1
($i=2,3,4$) 二阶格式	0	0.058 2	0.155 2	0.394 4	1
($i=3$) 四阶格式	0	0.050 5	0.134 8	0.391 8	1

仅节点3采用四阶截差就使结果明显改善。

表 3-2 网格疏密的影响(二阶格式)

区间数	4	8	16	32	64	精确解
$\phi_{x=1}$	0.058 2	0.050 2	0.048 0	0.047 5	0.047 3	0.047 3
$\phi_{x=2}$	0.155 2	0.140 4	0.136 4	0.135 3	0.135 0	0.135 0
$\phi_{x=3}$	0.394 4	0.375 2	0.369 7	0.368 3	0.367 9	0.367 9

16或32个区间数的解就可以作为网格独立解。

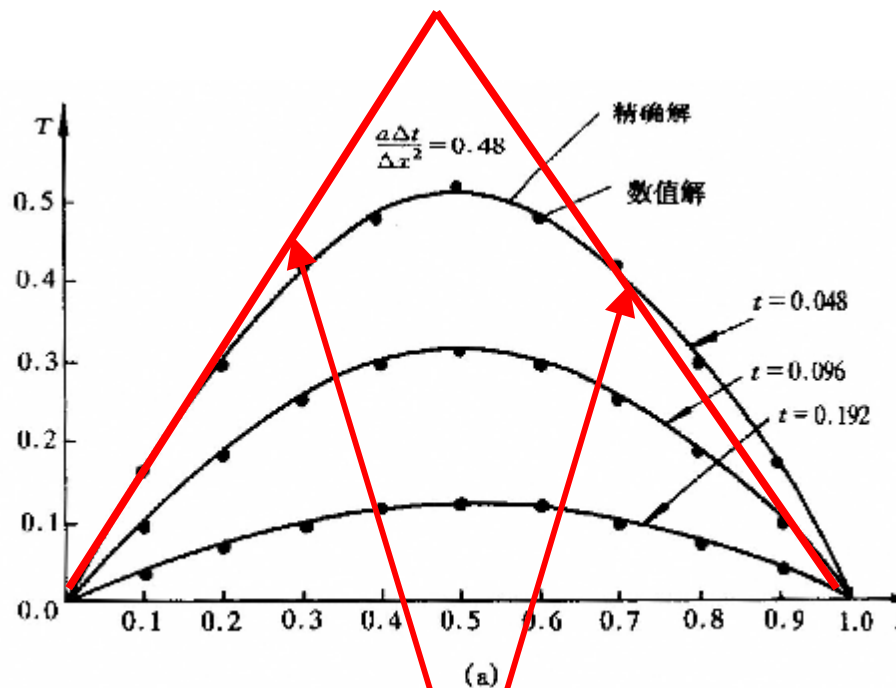
例3-3 显式格式不稳定性示例

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1$$

$$t \leq 0, \quad T = 2x, \quad 0 \leq x \leq 0.5; \quad T = 2(1-x), \quad 0.5 \leq x \leq 1$$

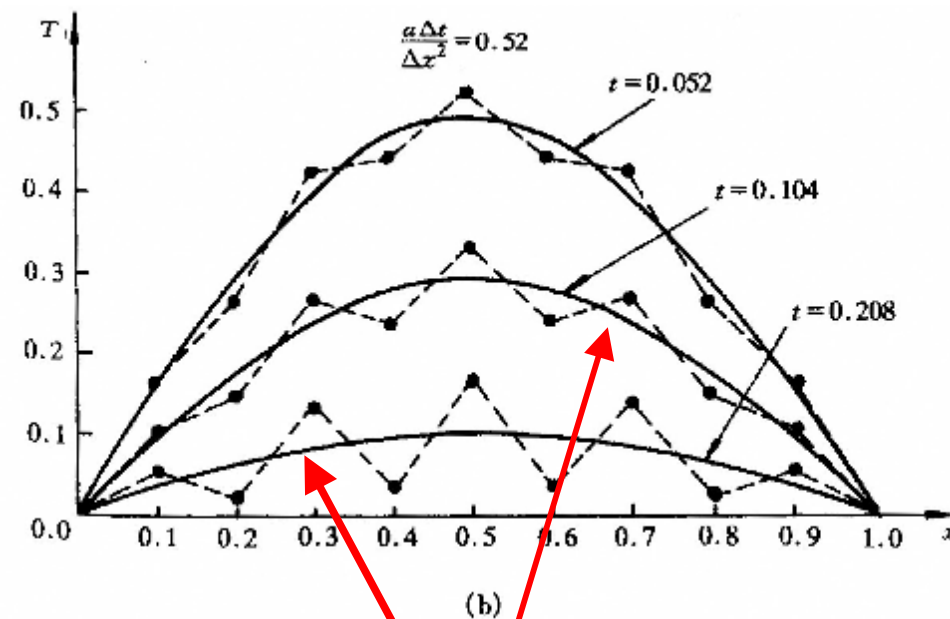
$$t > 0, \quad T(0, t) = T(1, t) = 0$$

解：对 $\frac{a\Delta t}{\Delta x^2} = 0.48$ 及 0.52 求解。



初场

$$\frac{a\Delta t}{\Delta x^2} = 0.48$$



精确解

$$\frac{a\Delta t}{\Delta x^2} = 0.52$$

1.4.5 von Neumann 分析方法

1. 基本思想

数值计算误差是一种扰动，可以分解为有限个谐波；如果某格式使任一谐波分量的振幅随时间而衰减或至少不变，则该格式是稳定的；否则即为不稳定。

2. 分析方法

设误差矢量分量为 $\varepsilon(t) = \psi(t)e^{li\theta}$ ；将其代入到离散方程中；找出相邻两个时层的振幅 $\psi(t)$ 之比，稳定性要求：

$$\left| \frac{\psi(t + \Delta t)}{\psi(t)} \right| \leq 1$$

一维非稳态导热的FTCS格式的稳定性分析

将 $\varepsilon(t) = \psi(t)e^{Ii\theta}$ 代入到离散方程

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = a \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$
$$\frac{\psi(t + \Delta t) - \psi(t)}{\Delta t} e^{Ii\theta} = a\psi(t) \frac{e^{I(i+1)\theta} - 2e^{Ii\theta} + e^{I(i-1)\theta}}{\Delta x^2}$$

两边同除 $e^{Ii\theta}$ ，根**Euler**公式： $e^{I\theta} = \cos\theta + I\sin\theta$

整理之，得：

$$\frac{\psi(t + \Delta t)}{\psi(t)} = 1 - 2\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\right)(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{\psi(t + \Delta t)}{\psi(t)} = 1 - 4\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\right) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

稳定性要求:

即: $-1 \leq 1 - 4\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\right) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \leq 1$

$$-1 \leq \frac{\psi(t + \Delta t)}{\psi(t)} \leq 1$$

自动成立

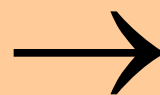
故要求:

$$-1 \leq 1 - 4\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\right) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$4\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\right) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \leq 2$$

这一要求应对所有 θ 角都成立, 最苛刻的情况是

$$\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1$$



$$\frac{a\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$

1.4.6 离散方程的守恒特性分析

1. 定义与分析模型

将一个离散方程在任意有限容积内进行求和，如所得结果仍满足守恒关系，则称其具有守恒性。

在模型方程的离散中扩散项采用中心差分，其具有守恒性，分析仅对对流项的离散格式进行一非稳态项与对流项组成“平流方程”(advection):

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \frac{\partial (u\phi)}{\partial x} = 0$$

(守恒型)

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

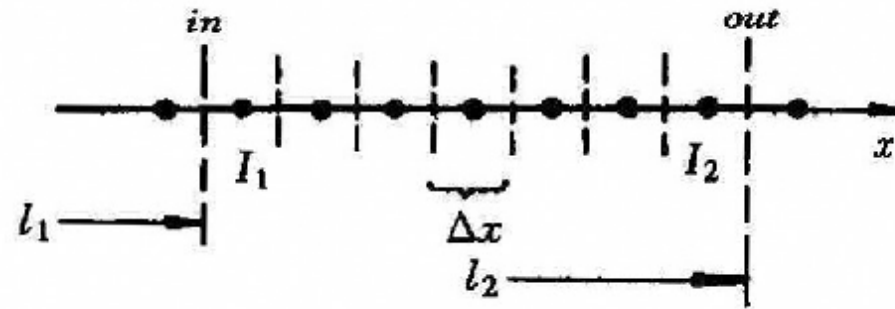
(非守恒型)

2. 直接求和分析法

将守恒型的**FTCS**格式对区间[l_1 , l_2]求和:

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} = - \frac{u_{i+1}\phi_{i+1} - u_{i-1}\phi_{i-1}}{2\Delta x}$$

空间项为中心
差分未加上标



$$\sum_{I_1}^{I_2} \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} = - \sum_{I_1}^{I_2} \frac{u_{i+1}\phi_{i+1} - u_{i-1}\phi_{i-1}}{2\Delta x} = - \sum_{I_1}^{I_2} \frac{(u\phi)_{i+1} - (u\phi)_{i-1}}{2\Delta x}$$

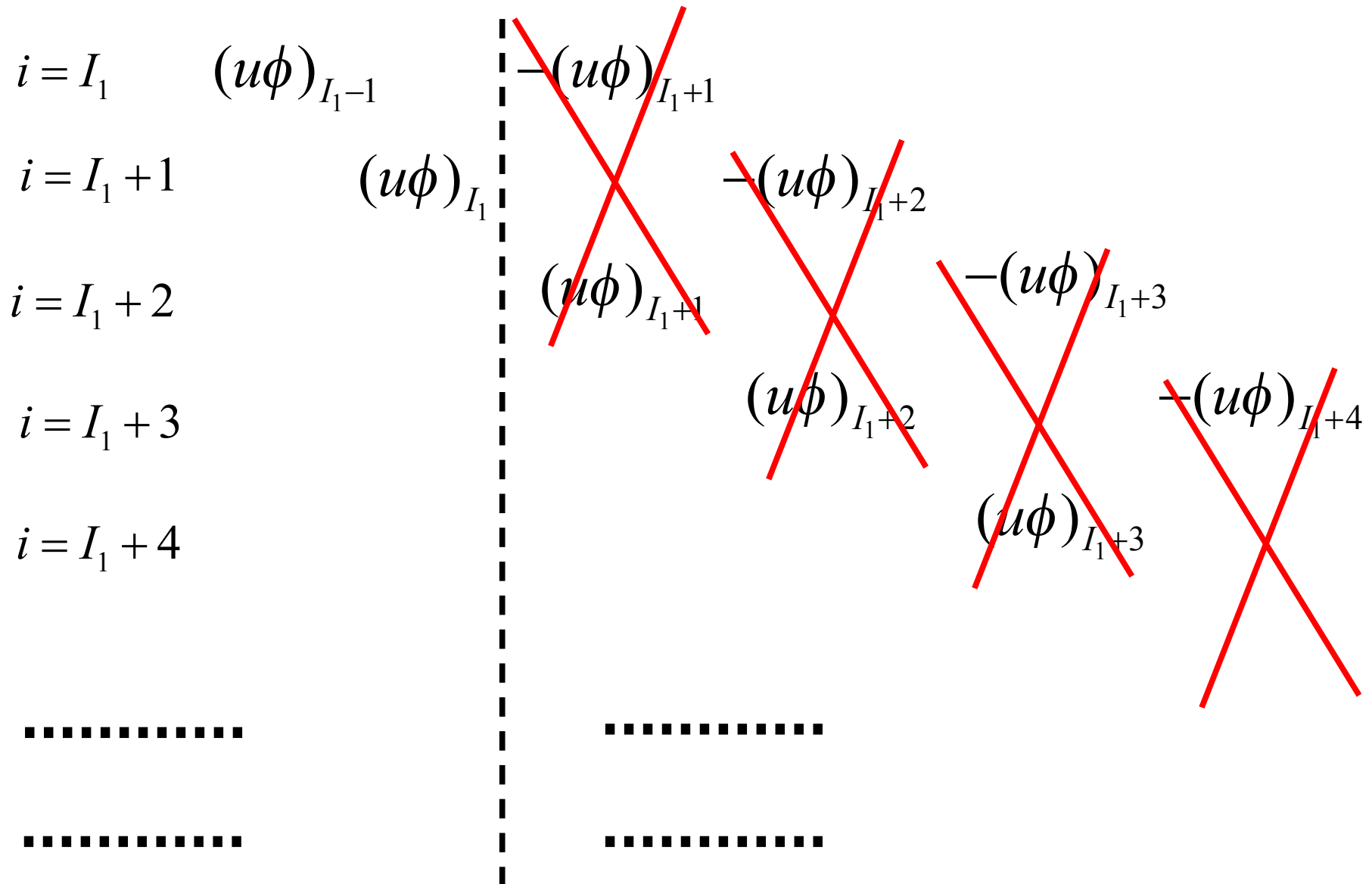
$$\sum_{I_1}^{I_2} \underbrace{(\phi_i^{n+1} - \phi_i^n) \Delta x}_{\text{增量}} = -\Delta t \sum_{I_1}^{I_2} \frac{(u\phi)_{i+1} - (u\phi)_{i-1}}{2}$$

在 Δt 时间间隔内区域 $[l_1, l_2]$ 中 ϕ 的增量

是否等于相同时间间隔内流入、流出之差？

将对流项做变化如下：

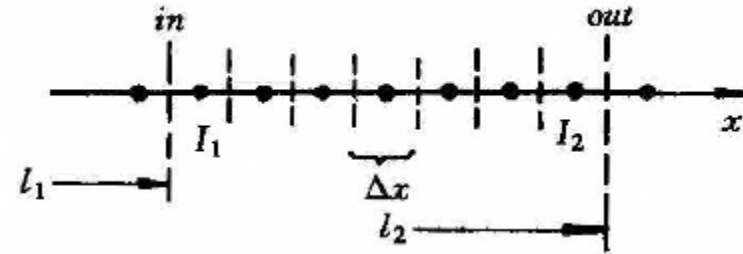
$$-\Delta t \sum_{I_1}^{I_2} \frac{(u\phi)_{i+1} - (u\phi)_{i-1}}{2} = \Delta t \sum_{I_1}^{I_2} \frac{(u\phi)_{i-1} - (u\phi)_{i+1}}{2}$$



$$\begin{array}{rcl}
 i = I_2 - 3 & (u\phi)_{I_2-4} & -(u\phi)_{I_2-2} \\
 i = I_2 - 2 & (u\phi)_{I_2-3} & -(u\phi)_{I_2-1} \\
 i = I_2 - 1 & (u\phi)_{I_2-2} & -(u\phi)_{I_2} \\
 i = I_2 & (u\phi)_{I_2-1} & -(u\phi)_{I_2+1}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta t \sum_{I_1}^{I_2} \frac{(u\phi)_{i-1} - (u\phi)_{i+1}}{2} \\
 = \frac{\Delta t}{2} \{ [(u\phi)_{I_1-1} + (u\phi)_{I_1}] - [(u\phi)_{I_2} + (u\phi)_{I_2+1}] \}
 \end{aligned}$$

右端项的进一步分析:



$$\frac{\Delta t}{2} \{ [(u\phi)_{I_1-1} + (u\phi)_{I_1}] - [(u\phi)_{I_2} + (u\phi)_{I_2+1}] \} =$$

$$\Delta t \left\{ \left[\frac{(u\phi)_{I_1-1} + (u\phi)_{I_1}}{2} \right] - \left[\frac{(u\phi)_{I_2} + (u\phi)_{I_2+1}}{2} \right] \right\} \xrightarrow{\text{中心差分}}$$

$$\Delta t(\phi \text{ flowin} - \phi \text{ flowout})$$

对流项的中心差分具有守恒特性。

3. 保证离散方程具有守恒性的条件

1) 导出离散方程的控制方程必须是守恒型的 对非守恒型的控制方程

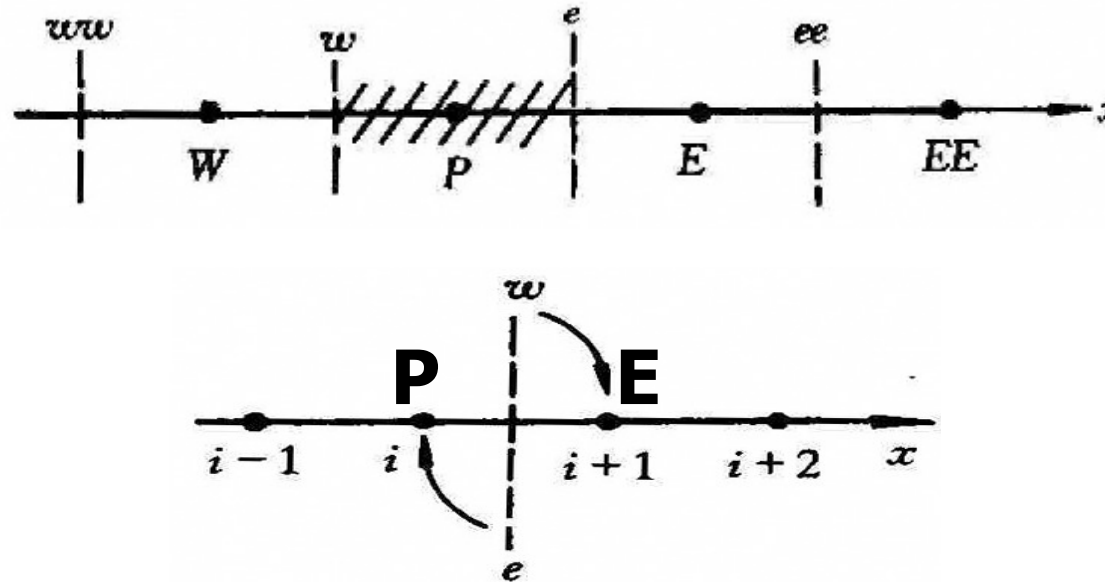
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

的FTCS格式
$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} = -u_i \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x}$$

采用上述求和方法，可以证明中间各项无法抵消，因此不具有守恒性。

2) 界面上变量及其一阶导数的离散形式连续

所谓连续，是指从界面两侧写出的界面值及其一阶导数的表达式均相同。



$$(\phi_e)_P = (\phi_w)_E;$$

$$\left[\left(\frac{\delta\phi}{\delta x}\right)_e\right]_P = \left[\left(\frac{\delta\phi}{\delta x}\right)_w\right]_E$$

分段线性的型线可以满足这一要求。

第一章作业

1—2; 1—3; 1—4; 1—5; 1—7

10月30日交作业